MAI 1 – 11. cvičení - limita, spojitost a derivace funkce.

Definice limity funkce a výpočet limit funkcí – příklady z minulého cvičení a dále:
($\log x$ je přirozený logaritmus , $\exp(x) = e^x$)

1. Víme-li, že $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, spočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují (limita složené funkce) :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(\cos x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)}$;

$\lim\limits_{x\to\infty} x\,(e^{\frac{1}{x}}-1)$; $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(2^{\frac{1}{x}}-1)$ $\lim\limits_{x\to\infty} x\log(1-\frac{2}{x})$.

b) Definujme $f(x)^{g(x)}=\exp\big(g(x)\cdot\log f(x)\big)$. Spočítejte $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$.

2. Definujte a vyšetřete vlastnosti funkce inverzní k funkci

a) $\sin x$ na intervalu $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ (fce $\arcsin x$); b) $tg\,x$ na intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (fce $arctg\,x$).

3. Limity s cyklometrickými funkcemi $\arcsin x$, $arctg\,x$:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x}{x^2-x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{arctg\,x}{x^2-x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{arctg\,x}{x^2-x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to ?} arctg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

7. Vyšetřete, zda lze v bodě $a=0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f, která je pro $x\neq 0$ dána předpisem

(i) $f(x)=x\,arctg\dfrac{1}{x}$; (ii) $f(x)=\dfrac{\ln(4x^2+1)}{x^2}$; (iii) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Výpočet derivace funkce .

Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte :

$f(x)=:$ $\dfrac{1}{x}+4x^2$; $\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$; $x+\sin x$; $x^2\sin x$; $x\ln(x-3)$; $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; $\dfrac{x^3}{x^2-1}$; $\dfrac{2}{\left(x^3-2\right)^2}$;

$x-2\,arctg\,x$;

$\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$; $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; $\sqrt{1+\sin 4x}$; $\cos\sqrt{x}$; x^2e^{-x}; $e^{\frac{1}{x}}-x$; $\exp\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$; $\dfrac{e^{-x}}{2-x}$; $\sqrt{x}\,arctg\sqrt{x}$;

$x^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

$x^3\ln\left(arctg\,2x\right)$; $e^{-3x^2}\cos\left(\ln 2x\right)$; $\sqrt{x^2+1}\,arctg\left(\sin 2x\right)$; $arctg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$; $\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$;

$\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$; $\left|arctg\,x\right|$; $\left|arctg^3 x\right|$;